量子力学A演習 解答例（演習４）v1.4

（1）$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger$

（解答例） $\hat{X}\hat{Y}|\alpha> = \hat{X}(\hat{Y}|\alpha>) = \hat{X}|\beta> = |\gamma>$ とおくと、

$<\gamma| = <\beta|\hat{X}^\dagger$ 、$<\beta| = <\alpha|\hat{Y}^\dagger$ なので、$<\gamma| = <\alpha|\hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger$ となる。

一方、$<\gamma| = <\alpha|(\hat{X}\hat{Y})^\dagger$なので、$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger$

（2）$<k|\hat{X}\hat{Y}|j> = \sum_{\alpha=1}^{N} <k|\hat{X}|\alpha><\alpha|\hat{Y}|j>$

（解答例） $\sum_{\alpha=1}^{N}|\alpha><\alpha| = \hat{I}$ （恒等演算子）なので、$<k|\hat{X}\hat{Y}|j> = <k|\hat{X}(\sum_{\alpha=1}^{N}|\alpha><\alpha|)\hat{Y}|j>$

のように、式の途中に挿入できる。和の記号を外に出せば与式が得られる。

（3）$<B|\hat{M}|A> = <A|\hat{M}^\dagger|B>^*$ (3-4-28)

（解答例） $<B|\hat{M}|A> = <B|(\hat{M}|A>) = <B|C> = <C|B>^* = \{(<A|\hat{M}^\dagger)|B>\}^* = <A|\hat{M}^\dagger|B>^*$

（途中で、$\hat{M}|A> = |C>$ とおいた。）

（4）$<A|\hat{M}^\dagger\hat{M}|A> \geq 0$

（解答例） $\hat{M}|A> = |C>$ とおくと、$<C| = <A|\hat{M}^\dagger$ なので、$<A|\hat{M}^\dagger\hat{M}|A> = <C|C> \geq 0$

最後のところは、同じベクトルの内積は正か０なので。（内積の性質、(3-6)式参照）

（5）$\hat{M}$ が「複素数 α をかける演算子」のとき、$\hat{M}^\dagger$ は「複素数 α^* をかける演算子」

（解答例） $\hat{M}|A> = \alpha|A> = |C>$ とおくと、$<C| = <A|\alpha^*$ だが、$<C| = <A|M^\dagger$でもあるので、$M^\dagger = \alpha^*$

（6）$\hat{M} \equiv |B><A|$ ならば、$\hat{M}^\dagger = |A><B|$ (3-4-29)

（解答例） $\hat{M}|\alpha> = |B><A|\alpha>$ なので、

$<\alpha|\hat{M}^\dagger = (<A|\alpha>^*)<B| = (<\alpha|A>)<B| = <\alpha|A><B|.$ よって、$\hat{M}^\dagger = |A><B|$

（7）任意の $\hat{M}$ は $\hat{M} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|k><k|\hat{M}|j><j|$ と書ける (3-4-30)

（解答例） 恒等演算子 $\sum_{k=1}^{N}|k><k| = \hat{I}$、$\sum_{j=1}^{N}|j><j| = \hat{I}$ を使い、

$$\hat{M} = (\sum_{k=1}^{N}|k><k|)\hat{M}(\sum_{j=1}^{N}|j><j|) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|k><k|\hat{M}|j><j|$$

（8）基底を $\hat{M}$ の固有ベクトルに取った場合、$\hat{M}$ に対応した行列は固有値を対角成分とする対角行列になる

（解答例） $\hat{M}$に対応した行列の成分は(3-4-8)より、$m_{kj} \equiv <\lambda_k|\hat{M}|\lambda_j>$ となる。ただし、今、$|\lambda_k>, |\lambda_j>$ は$\hat{M}$の固有ベクトルにとっているので、式(3-4-4)より、$\hat{M}|\lambda_j> = \lambda_j|\lambda_j>$ （固有値をλ_jとした）。それゆえ、$m_{kj} \equiv <\lambda_k|\lambda_j|\lambda_j> = \lambda_j\delta_{kj}$ となる（m_{kj} は $k=j$ の成分以外は０となる）。よって、$\hat{M}$ に対応した行列は固有値を対角成分とする対角行列となる。

（9）基底を $\hat{M}$ の固有ベクトルの組$\{|\lambda_j>\}$ にとった場合、その固有値を λ_j とすると

$\hat{M}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j|\lambda_j><\lambda_j|$ (3-4-31) と書ける。これを $\hat{M}$ の「スペクトル分解」と呼ぶときがある。

3-2-4節、(3-14)式で定義した射影演算子$\hat{\Lambda}_j=|\lambda_j><\lambda_j|$を使うと、(3-4-31)は、

$\hat{M}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\hat{\Lambda}_j$ (3-4-32) と書くことができる。

（解答例）一般に、(3-4-30)より、$\hat{M}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\lambda_k><\lambda_k|\hat{M}|\lambda_j><\lambda_j|$ と書けるが、今、$\hat{M}$ の固有ベクトルの組$\{|\lambda_j>\}$ をとっているので、

$$\hat{M}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\lambda_k><\lambda_k|\hat{M}|\lambda_j><\lambda_j|=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\lambda_k><\lambda_k|\lambda_j|\lambda_j><\lambda_j|=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|\lambda_k>\lambda_j\delta_{kj}<\lambda_j|$$

これより、 (3-4-31)が求まる。射影演算子$\hat{\Lambda}_j=|\lambda_j><\lambda_j|$を使うと(3-4-32)は明らか。

（１０）$|A>$なる状態の時、Mを測定した場合の期待値（平均値） $<\hat{M}>_A$ は

$$<\hat{M}>_A\equiv<A|\hat{M}|A> \qquad (3\text{-}4\text{-}33)$$

となることを示せ（上のスペクトル分解の表式 (3-4-31)を代入してみよ

（解答例）3-5-1節で述べたように、 Mの任意の状態 $|A>$は、$\hat{M}$ の固有状態 $|\lambda_j>$ を正規直交基底として、$|A>=a_1|\lambda_1>+a_2|\lambda_2>+\ldots+a_j|\lambda_j>+\ldots+a_n|\lambda_n>$ のように書くことができる。ここで、$a_j=<\lambda_j|A>$.
$|A>$の時、Mを観測すると、$|A>$は固有状態のどれかに収縮する。この状態を$|\lambda_j>$とすると、観測値は固有値λ_j である。この確率は係数の２乗、$P(\lambda_j)=|a_j|^2=a_j^*a_j=<A|\lambda_j><\lambda_j|A>$ で表される。何度もMを観測した場合の期待値は$\sum_{j=1}^{N}\lambda_jP(\lambda_j)$ となる。ところで、$\hat{M}$ をスペクトル分解 (3-4-31)で表すと、$\hat{M}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j|\lambda_j><\lambda_j|$.
これを、次の式の $\hat{M}$に入れると 、 $<A|\hat{M}|A>=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j<A|\lambda_j><\lambda_j|A>=\sum_{j=1}^{N}\lambda_jP(\lambda_j)$ となるので、確かに$<\hat{M}>_A$ は期待値となっている。

（１１）エルミート演算子の固有値は実数
（１２）エルミート演算子の異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交する
（解答例） $\hat{M}$をエルミート演算子、$|\lambda_i>$を$\hat{M}$の固有ベクトル、λ_i を固有値とする。

$$\hat{M}|\lambda_i>=\lambda_i|\lambda_i>、\quad <\lambda_j|\hat{M}|\lambda_i>=<\lambda_j|\lambda_i|\lambda_i>=\lambda_i<\lambda_j|\lambda_i>$$

$$<\lambda_j|\hat{M}^\dagger=<\lambda_j|\hat{M}=<\lambda_j|\lambda_j^*、\quad <\lambda_j|\hat{M}|\lambda_i>=<\lambda_j|\lambda_j^*|\lambda_i>=\lambda_j^*<\lambda_j|\lambda_i>$$

上の２行の式で、一番右側の２式とも$<\lambda_j|\hat{M}|\lambda_i>$なので、それらの差を取ると、

$$(\lambda_i-\lambda_j^*)<\lambda_j|\lambda_i>=0$$

今、$i=j$ の場合、 $<\lambda_i|\lambda_i>\neq0$ なので、$(\lambda_i-\lambda_i^*)=0$ より$\lambda_i=\lambda_i^*$ となりλ_iは実数となる。

また、$\lambda_i\neq\lambda_j$ ならば、 $<\lambda_j|\lambda_i>=0$ となるから、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交している。

（１３）２つのエルミート演算子の積はエルミート演算子とは限らない
（解答例）$\hat{X},\hat{Y}$をエルミートとすると、$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger=\hat{Y}^\dagger\hat{X}^\dagger=\hat{Y}\hat{X}$であるが、$\hat{X},\hat{Y}$ が非可換の時（ $\hat{X}\hat{Y}\neq\hat{Y}\hat{X}$ の時）、２つのエルミート演算子の積はエルミート演算子とはならない（すなわち、一般に積はエルミート演算子とは限らない）